

# PENGUNAAN METODE HOMOTOPI UNTUK MENYELESAIKAN MODEL ALIRAN POLUTAN DI TIGA DANAU YANG SALING TERHUBUNG

A. T. WIBOWO<sup>1</sup>, JAHARUDDIN<sup>2</sup>, DAN A. KUSNANTO<sup>2</sup>

## Abstrak

Pencemaran danau merupakan masalah serius bagi lingkungan hidup. Salah satu cara pemantauan polusi pada danau dilakukan dengan membangun suatu model matematika. Dalam artikel ini ditinjau model penyebaran polutan pada tiga danau yang saling terhubung dan diselesaikan dengan menggunakan metode analisis homotopi. Dalam metode analisis homotopi, didefinisikan suatu operator yang didasarkan pada bentuk persamaan diferensial dalam model matematika. Hasil metode ini sesuai dengan metode perturbasi homotopi yang telah dilakukan oleh Merdan (2009). Grafik fungsi penyebaran polutan pada tiga danau yang saling terhubung diberikan berdasarkan bentuk-bentuk sumber polutan yang masuk pada danau pertama.

**Kata kunci:** model penyebaran polutan, metode analisis homotopi, masalah taklinear.

## PENDAHULUAN

Polusi atau pencemaran lingkungan hidup adalah masuknya atau dimasukkannya makhluk hidup, zat, energi, atau komponen lain ke dalam lingkungan hidup oleh kegiatan manusia sehingga kualitasnya turun sampai ke tingkat tertentu yang menyebabkan lingkungan hidup tidak dapat berfungsi sesuai dengan peruntukannya. Pemantauan polusi adalah langkah awal menuju perencanaan untuk menyelamatkan lingkungan hidup. Pemantauan polusi pada danau dapat dilakukan dengan pendekatan sistem dalam membangun model suatu penyebaran jumlah polusi pada danau. Model ini dapat digunakan sebagai bahan pertimbangan atau acuan untuk memformulasi kebijakan dalam pengendalian pencemaran yang terjadi.

Penggunaan persamaan diferensial dari pemantauan polusi sering muncul pada model matematika. Dalam artikel ini, akan ditinjau masalah laju alir jumlah polutan pada tiga danau dengan saluran yang saling terhubung. Masalah ini pernah dimodelkan oleh Biazar *et al.* (2006). Model matematika tersebut dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Beberapa penelitian difokuskan pada penemuan metode pendekatan analitik untuk memperoleh penyelesaian dari masalah yang dimodelkan dalam suatu persamaan diferensial. Beberapa metode yang telah digunakan untuk menyelesaikan model laju alir

---

<sup>1</sup> Mahasiswa Program Sarjana, Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

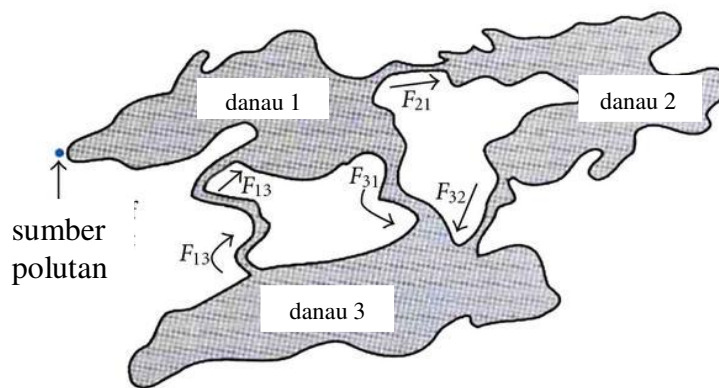
<sup>2</sup>Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

polutan pada tiga danau dengan saluran yang saling terhubung adalah metode aproksimasi Pade' (Merdan 2008), metode perturbasi (Merdan 2009), metode modifikasi transformasi diferensial (Merdan 2010), dan metode iterasi variasi (Biazar *et al.* 2010).

Dalam artikel ini akan digunakan metode analisis homotopi (Liao 2004) untuk menyelesaikan model laju alir jumlah polutan pada tiga danau yang saling terhubung. Hasil-hasil yang diperoleh dengan metode analisis homotopi akan dibandingkan dengan hasil-hasil yang telah diperoleh dengan metode perturbasi homotopi yang telah dilakukan oleh Merdan (2009).

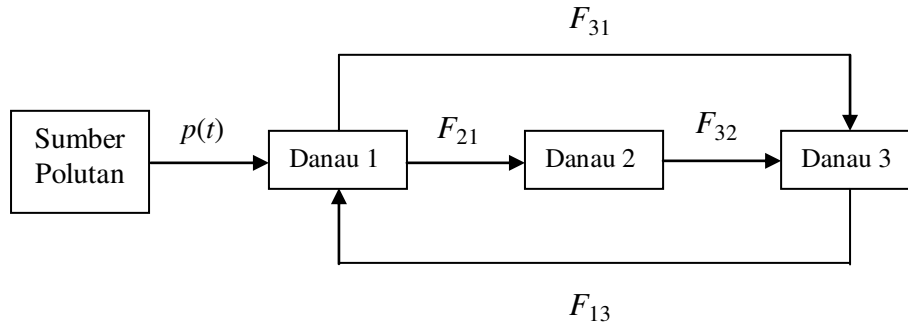
## FORMULASI MATEMATIKA

Berikut ini akan dibahas masalah laju alir jumlah polutan tiga danau saling terhubung yang diperlihatkan oleh Gambar 1.



Gambar 1 Laju alir jumlah polutan pada tiga danau

Model permasalahan laju alir jumlah polutan tiga danau yang saling terhubung didasarkan pada tiga danau besar yang berada di perbatasan antara Amerika Serikat dan Kanada, yaitu danau Superior, danau Huron, dan danau Michigan. Ketiga danau tersebut memiliki saluran berupa pipa yang diperlihatkan oleh anak panah pada Gambar 1. Polutan dikenakan ke dalam danau pertama dari sumber polutan. Di dalam danau pertama polutan dapat mengalir ke danau kedua dan ketiga. Pada danau kedua polutan hanya bisa mengalir ke danau ketiga, sedangkan di danau ketiga, polutan hanya bisa kembali mengalir ke dalam danau pertama. Aliran ini dapat disederhanakan ke dalam bagan alir yang diperlihatkan pada Gambar 2.



Gambar 2 Bagan aliran jumlah polutan pada tiga danau

Pada Gambar 2, laju jumlah polutan yang masuk ke danau per unit waktu dilambangkan dengan  $p(t)$ , dan konstanta  $F_{ji}$  dinyatakan sebagai laju aliran volume polutan dari danau  $i$  ke danau  $j$ . Misalkan  $x_i(t)$  merupakan jumlah polutan dalam danau  $i$  pada  $t \geq 0$ , dengan  $i = 1, 2, 3$ . Diasumsikan polutan di masing-masing danau tersebar secara merata di sepanjang danau oleh proses pencampuran, dan volume air  $V_i$  di danau  $i$  tetap untuk setiap danau. Diasumsikan pula polusi bersifat homogen dan tidak menyusut ke bentuk lain yang lebih sederhana, sehingga konsentrasi polutan di danau  $i$  pada waktu  $t$  diberikan oleh

$$C_i(t) = \frac{x_i(t)}{V_i}.$$

Diasumsikan tiap danau pada awalnya bebas dari pencemaran, sehingga  $x_i(0) = 0$  untuk setiap  $i = 1, 2, 3$ . Arus alir polutan dari danau  $i$  ke danau  $j$  pada setiap waktu  $t$ ,  $r_{ji}(t)$  didefinisikan sebagai berikut:

$$r_{ji}(t) = F_{ji}C_i(t) = \frac{F_{ji}}{V_i}x_i(t).$$

Besaran  $r_{ji}(t)$  digunakan untuk mengukur laju perubahan jumlah polutan di danau  $i$  yang mengalir ke danau  $j$  pada waktu  $t$ . Berdasarkan proses pencampuran, total laju perubahan polutan sama dengan selisih laju perubahan polutan yang masuk dan keluar. Menerapkan prinsip ini untuk setiap danau menghasilkan sistem persamaan diferensial orde pertama berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= p(t) + \frac{F_{13}}{V_3}x_3(t) - (F_{21} + F_{31})\frac{x_1(t)}{V_1}, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{F_{21}}{V_1}x_1(t) - \frac{F_{32}}{V_2}x_2(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= \frac{F_{31}}{V_1}x_1(t) + \frac{F_{32}}{V_2}x_2(t) - \frac{F_{13}}{V_3}x_3(t), \end{aligned} \quad (1)$$

dengan

$x_i(t)$  jumlah polutan pada danau  $i$  dalam waktu  $t \geq 0$ , dimana  $i = 1, 2, 3$ ,

$F_{ji}$  konstanta dari laju alir volume polutan dari danau  $i$  ke danau  $j$ ,  
 $p(t)$  fungsi laju jumlah polutan saat masuk ke danau per unit waktu sebagai sumber polutan,  
 $V_i$  volume air di danau  $i$ , dimana  $i = 1, 2, 3$ .

Selanjutnya, asumsikan pula bahwa volume ketiga danau tersebut tidak berubah selama proses pencampuran polutan. Jadi laju alir volume polutan ke dalam danau sama dengan laju alir volume polutan yang keluar dari danau, sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned} F_{13} &= F_{21} + F_{31}, \\ F_{21} &= F_{32}, \\ F_{31} + F_{32} &= F_{13}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dalam artikel ini akan diselesaikan masalah (1) dengan kendala (2) dan  $x_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  dengan menggunakan metode analisis homotopi dan membandingkan hasilnya dengan metode perturbasi homotopi yang telah dilakukan oleh Merdan (2009).

## ANALISIS METODE

Berikut ini diberikan ilustrasi konsep dasar metode homotopi berdasarkan pada (Liao, 2004). Misalkan diberikan persamaan diferensial berikut:

$$A[y(t)] = 0. \quad (3)$$

Dengan  $A$  suatu operator turunan dan  $y$  fungsi yang akan ditentukan dan bergantung pada  $t$ . Selanjutnya didefinisikan pula suatu operator linear  $\mathcal{L}$  yang memenuhi

$$\mathcal{L}[f] = 0, \text{ bila } f = 0. \quad (4)$$

Didefinisikan suatu fungsi homotopi sebagai berikut:

$$\mathcal{H}(u(t, q), q) = (1 - q) \mathcal{L}[u(t, q) - y_0(t)] + qA[u(t, q)], \quad (5)$$

dengan  $u$  fungsi yang akan ditentukan dan bergantung pada  $t$  dan parameter  $q$ . Fungsi  $y_0(t)$  merupakan pendekatan awal dari penyelesaian. Pada saat  $q = 0$ , persamaan (5) menjadi

$$\mathcal{H}(u(t, 0), 0) = \mathcal{L}[u(t, 0) - y_0(t)],$$

dan pada saat  $q = 1$  menjadi

$$\mathcal{H}(u(t, 1), 1) = A[u(t, q)].$$

Berdasarkan persamaan (3) dan (4), maka penyelesaian persamaan  $\mathcal{H}(u(t, 0), 0) = 0$  dan  $\mathcal{H}(u(t, 1), 1) = 0$  masing-masing adalah  $u(t, 0) = y_0(t)$ , dan  $u(t, 1) = y(t)$ . Deret Taylor untuk fungsi  $u(t, q)$  terhadap  $q$  di sekitar  $q = 0$  adalah

$$u(t, q) = u(t, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m u(t, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} q^m.$$

Misalkan dinotasikan

$$y_m(t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m u(t,q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}.$$

Karena  $u(t,0) = y_0(t)$ , maka

$$u(t,q) = y_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(t) q^m. \quad (6)$$

Karena  $u(t,1) = y(t)$ , maka pada saat  $q = 1$  diperoleh

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(t). \quad (7)$$

Pada metode homotopi, fungsi  $u(t,q)$  adalah penyelesaian dari persamaan  $\mathcal{H}(u(t,q),q) = 0$  atau  $(1-q) \mathcal{L}[u(t,q) - y_0(t)] = -qA[u(t,q)]$ . Selanjutnya persamaan tersebut diturunkan terhadap  $q$  hingga  $m$  kali dan dievaluasi pada  $q = 0$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}[y_m(t) - \chi_m y_{m-1}(t)] = -R_m(\vec{y}_{m-1}), \quad (8)$$

dengan

$$\begin{aligned} \vec{y}_{m-1} &= (y_0(t), y_1(t), \dots, y_m(t)), \\ R_m(\vec{y}_{m-1}) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} A[u(t,q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}, \\ \chi_m &= \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Hasil  $y_m(t)$  pada metode homotopi dengan menyelesaikan persamaan (8) digunakan untuk memperoleh penyelesaian persamaan (3) yaitu pada persamaan (7).

Berdasarkan persamaan (1), didefinisikan operator linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i[u_i(t,q)] &= \frac{\partial u_i(t,q)}{\partial t}, \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \\ A_1[u_1(t,q), u_2(t,q), u_3(t,q)] &= \frac{\partial u_1(t,q)}{\partial t} - p(t) - \frac{F_{13}}{V_3} u_3(t,q) + \frac{F_{13}}{V_1} u_1(t,q), \\ A_2[u_1(t,q), u_2(t,q), u_3(t,q)] &= \frac{\partial u_2(t,q)}{\partial t} - \frac{F_{21}}{V_1} u_1(t,q) + \frac{F_{32}}{V_2} u_2(t,q), \\ A_3[u_1(t,q), u_2(t,q), u_3(t,q)] &= \frac{\partial u_3(t,q)}{\partial t} - \frac{F_{31}}{V_1} u_1(t,q) - \frac{F_{32}}{V_2} u_2(t,q) + \frac{F_{13}}{V_3} u_3(t,q). \end{aligned} \quad (10)$$

dengan  $u_1(t,q)$ ,  $u_2(t,q)$ , dan  $u_3(t,q)$  fungsi yang bergantung pada  $t$  dan  $q$ . Didefinisikan suatu fungsi homotopi berdasarkan persamaan (3) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1(x(t,q),q) &= [\dot{x}_1(t,q) - \dot{x}_{1,0}(t)] + q \left[ \dot{x}_{1,0}(t) - p(t) - \frac{F_{13}}{V_3} x_3(t,q) + \frac{F_{13}}{V_1} x_1(t,q) \right], \\ \mathcal{H}_2(x(t,q),q) &= [\dot{x}_2(t,q) - \dot{x}_{2,0}(t)] + q \left[ \dot{x}_{2,0}(t) - \frac{F_{21}}{V_1} x_1(t,q) + \frac{F_{32}}{V_2} x_2(t,q) \right], \\ \mathcal{H}_3(x(t,q),q) &= [\dot{x}_3(t,q) - \dot{x}_{3,0}(t)] + q \left[ \dot{x}_{3,0}(t) - \frac{F_{31}}{V_1} x_1(t,q) - \frac{F_{32}}{V_2} x_2(t,q) + \frac{F_{13}}{V_3} x_3(t,q) \right].\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (8) dan fungsi homotopi tersebut di atas, maka diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1[x_{1,m}(t) - \chi_m x_{1,m-1}(t)] &= -R_{1,m}(\vec{x}_{1,m-1}, \vec{x}_{2,m-1}, \vec{x}_{3,m-1}), \\ \mathcal{L}_2[x_{2,m}(t) - \chi_m x_{2,m-1}(t)] &= -R_{2,m}(\vec{x}_{1,m-1}, \vec{x}_{2,m-1}, \vec{x}_{3,m-1}), \\ \mathcal{L}_3[x_{3,m}(t) - \chi_m x_{3,m-1}(t)] &= -R_{3,m}(\vec{x}_{1,m-1}, \vec{x}_{2,m-1}, \vec{x}_{3,m-1}),\end{aligned}\tag{11}$$

dengan

$$\begin{aligned}R_{1,m}(\vec{x}_{1,m-1}, \vec{x}_{2,m-1}, \vec{x}_{3,m-1}) &= \frac{\partial x_{1,m-1}(t)}{\partial t} - F_{13} \left[ \frac{x_{3,m-1}(t)}{V_3} - \frac{x_{1,m-1}(t)}{V_1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} p(t)}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}, \\ R_{2,m}(\vec{x}_{1,m-1}, \vec{x}_{2,m-1}, \vec{x}_{3,m-1}) &= \frac{\partial x_{2,m-1}(t)}{\partial t} - F_{21} \left[ \frac{x_{2,m-1}(t)}{V_2} - \frac{x_{1,m-1}(t)}{V_1} \right], \\ R_{3,m}(\vec{x}_{1,m-1}, \vec{x}_{2,m-1}, \vec{x}_{3,m-1}) &= \frac{\partial x_{3,m-1}(t)}{\partial t} - F_{13} \frac{x_{1,m-1}(t)}{V_1} - F_{32} \frac{x_{2,m-1}(t)}{V_2} \\ &\quad + F_{13} \frac{x_{3,m-1}(t)}{V_3}.\end{aligned}\tag{12}$$

Misalkan penyelesaian pendekatan awal  $x_{1,0}(t)=r_1$ ,  $x_{2,0}(t)=r_2$ , dan  $x_{3,0}(t)=r_3$ . Penyelesaian masalah nilai awal persamaan (1) dengan metode analisis homotopi hingga orde keenam dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_{1,0}(t) + x_{1,1}(t) + x_{1,2}(t) + x_{1,3}(t) + x_{1,4}(t) + x_{1,5}(t) + x_{1,6}(t), \\ x_2(t) &= x_{2,0}(t) + x_{2,1}(t) + x_{2,2}(t) + x_{2,3}(t) + x_{2,4}(t) + x_{2,5}(t) + x_{2,6}(t), \\ x_3(t) &= x_{3,0}(t) + x_{3,1}(t) + x_{3,2}(t) + x_{3,3}(t) + x_{3,4}(t) + x_{3,5}(t) + x_{3,6}(t).\end{aligned}$$

## APLIKASI METODE

Pada bagian ini metode analisis homotopi akan diaplikasikan dengan masukan data-data sebagai berikut:

- jumlah polutan yang masuk ke danau  $i$  pada saat  $t = 0$  adalah  $r_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,
- volume konstan dari setiap danau adalah  $V_1 = 2900 \text{ mi}^3$ ,  $V_2 = 850 \text{ mi}^3$ ,  $V_3 = 1180 \text{ mi}^3$ ,

- laju aliran volume polutan ke dalam suatu danau dari danau lainnya tiap tahunnya adalah  $F_{21} = 18 \text{ mi}^3/\text{tahun}$ ,  $F_{32} = 18 \text{ mi}^3/\text{tahun}$ ,  $F_{31} = 20 \text{ mi}^3/\text{tahun}$  dan  $F_{13} = 38 \text{ mi}^3/\text{tahun}$ . Besaran-besaran ini harus memenuhi kendala-kendala yang diperoleh pada persamaan (2).

Dalam artikel ini, ditinjau dua kasus laju alir jumlah polutan yang masuk ke danau pertama dari sumber polutan yaitu:

- Laju alir jumlah polutan berupa fungsi konstan. Pada kasus ini, jumlah polutan yang masuk ke dalam danau pertama bertambah terus menerus secara linear hingga waktu tertentu.
- Laju alir jumlah polutan berupa fungsi sinusoidal. Pada kasus ini, jumlah polutan yang masuk ke dalam danau pertama berubah-ubah secara periodik terhadap waktu.

### Sumber Polutan Berupa Fungsi Konstan

Misalkan sumber polutan, yaitu  $p(t)$  diberikan sebagai berikut:

$$p(t) = \begin{cases} C_{in} ; t \leq t_0 \\ 0 ; t > t_0, \end{cases}$$

Dengan  $C_{in}$  adalah rata-rata laju alir jumlah polutan selama proses pencampuran terjadi hingga waktu  $t_0$  dan nilai  $p(t) = 0$  setelah waktu  $t_0$ . Asumsikan  $C_{in} = 100$  polutan per satuan waktu,  $t_0 = 10$  yang menyatakan bahwa laju alir jumlah polutan yang masuk ke danau pertama sebagai sumber polutan sebesar 100 polutan per tahun untuk selama 10 tahun. Berdasarkan nilai parameter-parameter yang telah diberikan dengan  $p(t) = 100$ , diperoleh penyelesaian eksak pada selang  $t \leq 10$  sebagai berikut:

$$x_1(t) = 4,37 \times 10^{-10} \exp(-0,033t) (1,34 \times 10^{11} \exp(0,033t)t + 2,81 \times 10^{12} \exp(0,033t) + 7,874 \times 10^{10} \sin(7,37 \times 10^{-3}t) - 2,81 \times 10^{12} \cos(7,37 \times 10^{-3}t)),$$

$$x_2(t) = 7,69 \times 10^{-3} \exp(-0,033t) (2,242 \times 10^{10} \exp(0,033t)t - 5,895 \times 10^{11} \exp(0,033t) - 3,83 \times 10^{11} \sin(7,37 \times 10^{-3}t) + 5,895 \times 10^{11} \cos(7,37 \times 10^{-3}t)),$$

$$x_3(t) = 7,117 \times 10^{-10} \exp(-0,033t) (3,36 \times 10^{10} \exp(0,033t)t - 1,092 \times 10^{12} \exp(0,033t) + 4,38 \times 10^{11} \sin(7,37 \times 10^{-3}t) + 1,092 \times 10^{12} \cos(7,37 \times 10^{-3}t)).$$

Berikut ini diberikan Tabel 1 yaitu selisih antara penyelesaian metode homotopi dengan penyelesaian eksaknya. Tabel 2 yaitu selisih antara penyelesaian metode perturbasi homotopi yang diperoleh dari (Merdan 2009) dengan penyelesaian eksaknya. Berdasarkan Tabel 1 dan Tabel 2, metode analisis homotopi memiliki penyelesaian yang menghampiri penyelesaian eksaknya. Selisih galat yang dihasilkan oleh metode ini pada beberapa selang  $t$  sangat kecil.

TABEL 1  
Galat metode homotopi orde ke enam pada kasus pertama

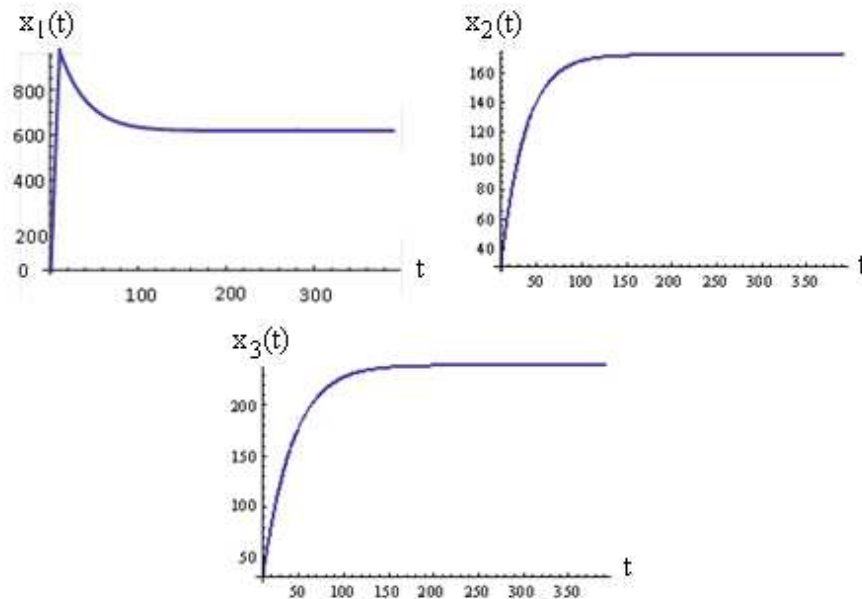
| $t$        | $ x_{1hm}(t) - x_{1eks}(t) $ | $ x_{2hm}(t) - x_{2eks}(t) $ | $ x_{3hm}(t) - x_{3eks}(t) $ |
|------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| <b>0</b>   | 0                            | 0                            | 0                            |
| <b>0.1</b> | $3.32653 \times 10^{-6}$     | $5.16117 \times 10^{-10}$    | $3.09877 \times 10^{-3}$     |
| <b>0.2</b> | $2.65734 \times 10^{-5}$     | $8.24475 \times 10^{-9}$     | $1.23764 \times 10^{-2}$     |
| <b>0.3</b> | $8.95546 \times 10^{-5}$     | $4.16727 \times 10^{-8}$     | $2.7805 \times 10^{-2}$      |
| <b>0.4</b> | $2.11968 \times 10^{-4}$     | $1.31497 \times 10^{-7}$     | $4.93567 \times 10^{-2}$     |
| <b>0.5</b> | $4.13398 \times 10^{-4}$     | $3.20528 \times 10^{-7}$     | $7.7004 \times 10^{-2}$      |
| <b>0.6</b> | $7.13314 \times 10^{-4}$     | $6.63593 \times 10^{-7}$     | 0.110719                     |
| <b>0.7</b> | $1.13107 \times 10^{-3}$     | $1.22744 \times 10^{-6}$     | 0.150475                     |
| <b>0.8</b> | $1.68591 \times 10^{-3}$     | $2.09063 \times 10^{-6}$     | 0.196245                     |
| <b>0.9</b> | $2.39696 \times 10^{-3}$     | $3.34348 \times 10^{-6}$     | 0.248001                     |
| <b>1.0</b> | $3.28324 \times 10^{-3}$     | $5.08792 \times 10^{-6}$     | 0.305716                     |

TABEL 2  
Galat metode perturbasi homotopi orde ke enam pada kasus pertama

| $t$        | $ x_{1hpm}(t) - x_{1eks}(t) $ | $ x_{2hpm}(t) - x_{2eks}(t) $ | $ x_{3hpm}(t) - x_{3eks}(t) $ |
|------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| <b>0</b>   | 0                             | 0                             | 0                             |
| <b>0.1</b> | $1.86517 \times 10^{-13}$     | $5.69328 \times 10^{-14}$     | $1.78191 \times 10^{-14}$     |
| <b>0.2</b> | $2.62901 \times 10^{-13}$     | $1.28664 \times 10^{-14}$     | $9.88046 \times 10^{-14}$     |
| <b>0.3</b> | $1.42109 \times 10^{-14}$     | $2.2999 \times 10^{-14}$      | $2.78458 \times 10^{-14}$     |
| <b>0.4</b> | $1.77636 \times 10^{-13}$     | $8.40994 \times 10^{-15}$     | $1.31867 \times 10^{-13}$     |
| <b>0.5</b> | $2.20268 \times 10^{-13}$     | $7.43572 \times 10^{-14}$     | $1.08483 \times 10^{-13}$     |
| <b>0.6</b> | $2.55795 \times 10^{-13}$     | $1.27842 \times 10^{-13}$     | $2.03171 \times 10^{-14}$     |
| <b>0.7</b> | $2.13163 \times 10^{-13}$     | $2.83829 \times 10^{-13}$     | $2.21656 \times 10^{-13}$     |
| <b>0.8</b> | $1.42109 \times 10^{-14}$     | $6.96609 \times 10^{-13}$     | $5.46979 \times 10^{-13}$     |
| <b>0.9</b> | $4.68958 \times 10^{-13}$     | $1.53211 \times 10^{-12}$     | $1.01069 \times 10^{-12}$     |
| <b>1.0</b> | $1.13687 \times 10^{-12}$     | $3.35787 \times 10^{-12}$     | $2.31043 \times 10^{-12}$     |

Gambar 3 berikut ini merupakan penyelesaian eksak persamaan (1) untuk kasus pertama. Gambar 3 masing-masing menunjukkan grafik penyelesaian untuk  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , dan  $x_3(t)$ .





Gambar 3 Penyelesaian eksak masalah nilai awal (1) pada kasus pertama

Berdasarkan Gambar 3 diperoleh bahwa semakin besar nilai  $t$  untuk selang waktu selama 10 tahun, semakin besar jumlah polutan yang dihasilkan. Pada selang waktu di atas 10 tahun, jumlah polutan menjadi stabil, tetapi setiap danau mengalami perubahan penambahan jumlah polutan. Pada danau pertama, jumlah polutan menurun hingga konvergen ke 588,234, sedangkan pada danau kedua dan danau ketiga, jumlah polutan mengalami kenaikan hingga masing-masing konvergen ke 172,415 dan 239,352. Hal ini disebabkan oleh tidak adanya polutan yang masuk ke danau pertama pada selang waktu di atas 10 tahun ( $p(t) = 0$ ,  $t > 10$ ) dan terjadi proses pencampuran dari ketiga danau. Jika perubahan jumlah polutan dari ketiga danau pada bulan ketiga dalam selang 1 tahun diamati, maka danau pertama, kedua dan ketiga masing-masing menghasilkan laju perubahan jumlah polutan sebesar 99,67; 0,15; 0,33. Jumlah dari ketiga hasil tersebut sama dengan laju perubahan jumlah polutan yang berada di ketiga danau yaitu 100 polutan/tahun. Total laju perubahan dari jumlah polutan ketiga danau meningkat secara linear bergantung pada fungsi konstan  $p(t)$  yang diberikan yaitu bernilai 100. Dengan demikian polutan yang diberikan dari sumber polutan akan menyebar ke setiap danau.

### Sumber Polutan Berupa Fungsi Sinusoidal

Misalkan sumber polutan, yaitu  $p(t)$  diberikan sebagai berikut:

$$p(t) = C_i \left( 1 + a \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right),$$

dengan

- $a$  simpangan normal yang memengaruhi nilai maksimum dan minimum fungsi  $p(t)$  dan selalu bernilai antara 0 dan 1,

$T$  periode yang dibutuhkan dalam perubahan jumlah polutan selama proses pencampuran,

$C_i$  rata-rata laju alir jumlah polutan selama proses pencampuran.

Agar laju alir jumlah polutan tersebut selalu bernilai positif dan berubah-ubah secara periodik dari 0 sampai dengan 200, maka diasumsikan  $C_i = 100$ ,  $a = 1$ , dan  $T = 2\pi$ .

Berdasarkan nilai parameter-parameter yang telah diberikan dengan fungsi  $p(t) = 100(1 + \sin t)$ , diperoleh penyelesaian eksak sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -1,190 \times 10^{-3} \exp(-0,033t) \cos(7,37 \times 10^{-3}t) + 39,68 \exp(-0,033t) \sin(7,37 \times 10^{-3}t) \\ &\quad + 1,31 \sin(t) - 99,96 \cos(t) + 58,82t + 1.290,48, \\ x_2(t) &= -287,32 \exp(-0,033t) \sin(7,37 \times 10^{-3}t) + 436,95 \exp(-0,033t) \cos(7,37 \times 10^{-3}t) \\ &\quad - 0,62 \sin(t) - 0,02 \cos(t) + 17,24t - 435,93, \\ x_3(t) &= 2.476,40 \exp(-0,033t) \sin(7,37 \times 10^{-3}t) + 753,56 \exp(-0,033t) \cos(7,37 \times 10^{-3}t) \\ &\quad - 0,689 \sin(t) - 0,018 \cos(t) + 23,93t - 753,55. \end{aligned}$$

Berikut ini diberikan Tabel 3 yaitu selisih antara penyelesaian metode analisis homotopi dengan penyelesaian eksaknya. Tabel 4 yaitu selisih antara penyelesaian metode perturbasi homotopi yang diperoleh dari (Merdan 2009) dengan penyelesaian eksaknya.

TABEL 3  
Galat metode homotopi orde ke enam pada kasus kedua

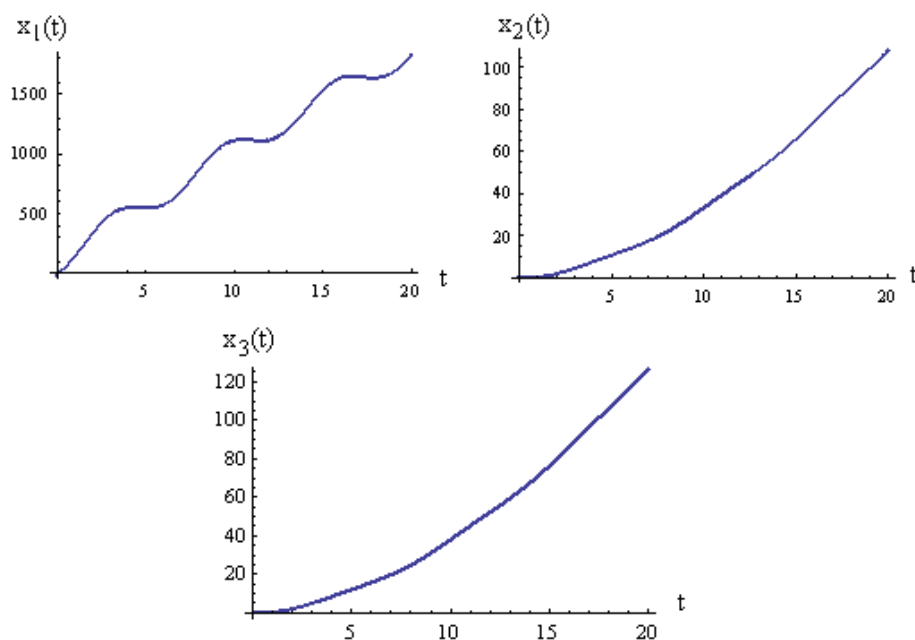
| $t$        | $ x_{1hm}(t) - x_{1eks}(t) $ | $ x_{2hm}(t) - x_{2eks}(t) $ | $ x_{3hm}(t) - x_{3eks}(t) $ |
|------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| <b>0</b>   | $2.26849 \times 10^{-14}$    | $3.69216 \times 10^{-14}$    | $4.98677 \times 10^{-14}$    |
| <b>0.1</b> | $3.40969 \times 10^{-6}$     | $3.56857 \times 10^{-4}$     | $3.5589 \times 10^{-3}$      |
| <b>0.2</b> | $2.79011 \times 10^{-5}$     | $1.4755 \times 10^{-3}$      | $1.4676 \times 10^{-2}$      |
| <b>0.3</b> | $9.62569 \times 10^{-5}$     | $3.42761 \times 10^{-3}$     | $3.40037 \times 10^{-2}$     |
| <b>0.4</b> | $2.33077 \times 10^{-4}$     | $6.28377 \times 10^{-3}$     | $6.21788 \times 10^{-2}$     |
| <b>0.5</b> | $4.64719 \times 10^{-4}$     | $1.01128 \times 10^{-2}$     | $9.98152 \times 10^{-2}$     |
| <b>0.6</b> | $8.19217 \times 10^{-4}$     | $1.4981 \times 10^{-2}$      | 0.147498                     |
| <b>0.7</b> | $1.32619 \times 10^{-3}$     | $2.09517 \times 10^{-2}$     | 0.205777                     |
| <b>0.8</b> | $2.01673 \times 10^{-3}$     | $2.80844 \times 10^{-2}$     | 0.275162                     |
| <b>0.9</b> | $2.92326 \times 10^{-3}$     | $3.64345 \times 10^{-2}$     | 0.356116                     |
| <b>1.0</b> | $4.0794 \times 10^{-3}$      | $4.60525 \times 10^{-2}$     | 0.44905                      |

TABEL 4  
Galat metode perturbasi homotopi orde ke enam pada kasus kedua

| $t$        | $ x_{1hpm}(t) - x_{1eks}(t) $ | $ x_{2hpm}(t) - x_{2eks}(t) $ | $ x_{3hpm}(t) - x_{3eks}(t) $ |
|------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| <b>0</b>   | $2.26849 \times 10^{-14}$     | $3.69216 \times 10^{-14}$     | $4.98677 \times 10^{-14}$     |
| <b>0.1</b> | $4.61853 \times 10^{-14}$     | $3.56857 \times 10^{-4}$      | $3.56857 \times 10^{-4}$      |
| <b>0.2</b> | $2.77112 \times 10^{-13}$     | $1.47551 \times 10^{-3}$      | $1.47551 \times 10^{-3}$      |
| <b>0.3</b> | 0                             | $3.42765 \times 10^{-3}$      | $3.42765 \times 10^{-3}$      |
| <b>0.4</b> | $1.20792 \times 10^{-13}$     | $6.28391 \times 10^{-3}$      | $6.28391 \times 10^{-3}$      |
| <b>0.5</b> | $3.55271 \times 10^{-14}$     | $1.01131 \times 10^{-2}$      | $1.01131 \times 10^{-2}$      |
| <b>0.6</b> | $1.56319 \times 10^{-13}$     | $1.49817 \times 10^{-2}$      | $1.49817 \times 10^{-2}$      |
| <b>0.7</b> | $1.42109 \times 10^{-14}$     | $2.09531 \times 10^{-2}$      | $2.09531 \times 10^{-2}$      |
| <b>0.8</b> | $4.26326 \times 10^{-14}$     | $2.80868 \times 10^{-2}$      | $2.80868 \times 10^{-2}$      |
| <b>0.9</b> | $5.11591 \times 10^{-13}$     | $3.64384 \times 10^{-2}$      | $3.64384 \times 10^{-2}$      |
| <b>1.0</b> | $1.0516 \times 10^{-12}$      | $4.60586 \times 10^{-2}$      | $4.60586 \times 10^{-2}$      |

Dari Tabel 3 dan Tabel 4, metode homotopi memiliki penyelesaian yang menghampiri penyelesaian eksaknya. Selisih galat yang dihasilkan oleh metode ini pada beberapa selang  $t$  sangat kecil. Hal ini berarti metode homotopi dapat digunakan untuk menghampiri penyelesaian eksak masalah polutan di tiga danau yang saling terhubung pada kasus  $p(t)$  berupa fungsi sinusoidal.

Gambar 4 merupakan penyelesaian eksak persamaan (1) untuk kasus kedua. Gambar 4 masing-masing menunjukkan grafik penyelesaian untuk  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , dan  $x_3(t)$ .



Gambar 4 Penyelesaian eksak masalah nilai awal (1) pada kasus kedua

Berdasarkan Gambar 4 diperoleh bahwa semakin besar nilai  $t$ , semakin besar jumlah polutan yang dihasilkan. Pada danau pertama, perubahan jumlah polutan bergantung pada suatu selang waktu. Untuk selang waktu antara 0 sampai 2 tahun, jumlah polutan meningkat secara signifikan. Namun pada selang waktu antara 2 sampai 4 tahun, jumlah polutan meningkat secara perlahan melalui titik belok di  $t$  sama dengan  $\frac{3\pi}{2}$ . Hal itu terjadi terus menerus untuk selang waktu berikutnya. Pada danau kedua dan ketiga, perubahan jumlah polutan berubah-ubah sesuai selang waktu tertentu. Pada selang waktu antara 0 sampai 7 tahun, jumlah polutan meningkat secara perlahan. Setelah itu, jumlah polutan meningkat secara signifikan untuk selang waktu yang besar. Hal ini disebabkan oleh sumber polutan berupa fungsi sinusoidal yang berubah-ubah secara periodik. Jika perubahan jumlah polutan dari ketiga danau pada bulan ketiga dalam selang 1 tahun diamati, maka danau pertama, kedua dan ketiga masing-masing menghasilkan laju perubahan jumlah polutan sebesar 124,37; 0,17; 0,37.

## SIMPULAN

Model permasalahan laju alir polutan pada tiga danau yang saling terhubung didasarkan pada tiga danau besar yang berada di perbatasan antara Amerika Serikat dan Kanada. Polutan dikenakan ke dalam danau pertama sebagai sumber polutan yang berupa fungsi konstan, dan fungsi sinusoidal. Hal ini akan memengaruhi perubahan jumlah polutan pada setiap danau. Dari kedua fungsi masukan sebagai sumber polutan tersebut, metode analisis homotopi memiliki penyelesaian yang menghampiri penyelesaian eksaknya. Selisih galat yang dihasilkan oleh metode ini pada beberapa selang waktu sangat kecil. Hal ini berarti metode analisis homotopi dapat digunakan untuk menghampiri penyelesaian eksak masalah polutan di tiga danau yang saling terhubung.

Pada fungsi masukan (sumber polutan) berupa fungsi konstan, semakin besar nilai  $t$  untuk selang waktu selama 10 tahun, semakin besar jumlah polutan yang dihasilkan. Pada selang waktu di atas 10 tahun, jumlah polutan menjadi stabil. Hal ini disebabkan oleh tidak adanya polutan yang masuk ke danau pertama pada selang waktu di atas 10 tahun. Perubahan total dari jumlah polutan ketiga danau meningkat secara linear bergantung pada nilai konstan pada fungsi masukan yang diberikan, yaitu bernilai 100 polutan/tahun. Dengan demikian polutan yang diberikan dari sumber polutan menyebar ke setiap danau.

Pada fungsi masukan berupa fungsi sinusoidal, semakin besar nilai  $t$ , semakin besar jumlah polutan yang dihasilkan. Pada danau pertama, perubahan jumlah polutan bergantung pada selang waktu tertentu. Untuk selang waktuantara 0 sampai 2 tahun, jumlah polutan meningkat secara signifikan. Namun pada selang waktu antara 2 sampai 4 tahun, jumlah polutan meningkat secara perlahan melalui titik belok di  $t$  sama dengan  $\frac{3\pi}{2}$ . Hal itu terjadi terus menerus untuk selang

waktu berikutnya. Pada danau 2 dan 3, perubahan jumlah polutan pun berubah-ubah sesuai dengan selang waktu tertentu. Pada selang waktuantara 0 sampai 7 tahun, jumlah polutan meningkat secara perlahan. Setelah itu, jumlah polutan meningkat secara signifikan untuk selang waktu yang besar. Hal ini disebabkan oleh sumber polutan berupa fungsi sinusoidal yang berubah-ubah secara periodik.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Biazar J, Farrokhi L, Islam MR. 2006. Modelling the pollution of a system of lakes. *Applied Mathematics and Computation*.178:423-430.
- [2] Biazar J, Shahbala M, Ebrahimi H. 2010. VIM for solving the pollution problem of a system of lakes. *Journal of Control Science and Engineering*.2010:0-6.10.doi:10.1155/2010/829152.
- [3] Liao. 2004. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Boca Raton, New York.
- [4] Merdan M. 2008. He's variational iteration method applied to the solution of modelling the pollution of a system of lakes. *DPU Fen Bilimleri Dergisi*.2008(18)1302-3055.
- [5] Merdan M. 2009. Homotopy perturbation method for solving modelling the pollution of a system of lakes. *SDU Journal of Science (E-Journal)*. 4(1):99-111.
- [6] Merdan M. 2010. A new application of modified differential transformation method for modelling the pollution of a system of lakes. *Selcuk Journal of Applied Mathematics*.11(2):27-40.

